ODDÍL I. ANALÝZA POPTÁVKY

Kapitola 1 Od maximalizace užitku k poptávce

V kapitole se budeme zabývat otázkou, za jakých podmínek lze nalézt jediné řešení problému spotřebitele, který maximalizuje svůj užitek. Z optima spotřebitele odvodíme soustavu Marshallových individuálních poptávek.

1.1 Existence jediného řešení

Model, který se zabývá optimalizačním problémem, tvoří dvě složky: cílová (kriteriální, účelová) funkce a množina přípustných řešení.

Při formulaci optimalizačního problému musíme nejdříve vymezit účelovou funkci. Funkce se skládá ze závisle proměnné, která představuje objekt maximalizace či minimalizace, a z množiny nezávisle proměnných, která označuje objekty, jejichž velikost může ekonomický subjekt volit s ohledem na optimalizaci. Někdy se proto nezávisle proměnné označují jako volitelné.

Množina přípustných řešení zahrnuje všechny alternativy, které jsou dostupné subjektu při jeho rozhodování.

Podmínky, za nichž lze nalézt řešení optimalizačního problému, vymezují učebnice matematiky – viz např. učebnici [5, s. 206]. Pro naše potřeby je proto pouze vyjmenujeme. Řešení existuje, pokud:

- účelová funkce je spojitá,
- množina přípustných řešení je a) neprázdná, b) uzavřená, c) ohraničená.

Pokud řešení existuje, je možné si však položit otázku, zda uvedené řešení je lokálním nebo globálním extrémem. Lokální extrém je současně extrémem globálním, pokud:

- účelová funkce je kvasikonkávní,
- množina přípustných je řešení je konvexní.

Přitom lokální extrém se může stát globálním extrémem, i když uvedené podmínky nejsou splněny.

Opět pouze uvádíme požadavky, které jsou kladené na globální extrém, a ponecháme na čtenáři, aby se v případě potřeby podrobnějšího výkladu vrátil k učebnicím matematiky, např. k [6, s. 244].

Mohou však existovat funkce, které mají více globálních extrémů. Zformulujeme nyní podmínky, za nichž lze nalézt jediné řešení optimalizačního problému. Opět pouze tyto podmínky vyjmenujeme a pro potřeby podrobnějšího výkladu se odvoláme na již uvedené učebnice matematiky.

Jediné řešení lze nalézt, pokud

- je buď účelová funkce ryze kvasikonkávní,
- nebo je množina přípustných řešení ryze konvexní,
- nebo platí obojí současně.

Pro potřeby ekonomického výkladu je třeba si dále uvědomit, že ryze kvasikonkávní funkce vykazuje ryze konvexní vrstevnice funkce. Vrstevnice funkce chápeme jako množinu hodnot nezávisle proměnných příslušné funkce, kterým odpovídá konstantní hodnota závisle proměnné.

1.2 Preference spotřebitele a funkce užitku

V předcházejícím bodě jsme vymezili matematické podmínky, za nichž lze nalézt jediné řešení optimalizačního problému. Předmětem našeho zájmu je však analýza chování spotřebitele a poptávky.

V dalším kroku výkladu proto zformulujeme předpoklady, kterým musí chování spotřebitele vyhovovat, abychom mohli nalézt jediný (a optimální) koš statků, který bude spotřebitel nakupovat. Budeme se tudíž zabývat axiómy chování spotřebitele.

1. ***Úplnost srovnání***

Označme spotřební koše vektory ***A, B, C, D*** atd. Každý z těchto košů se skládá z určitého množství statků x_i pro = 1,..., n, kde n udává počet statků, které koš obsahuje.

Pro jednoduchost také předpokládáme, že není možné, aby množství spotřebovávaných statků, které obsahují jednotlivé koše, bylo záporné ($x_i \geq 0$ pro všechna i).

Axióm úplnosti srovnání lze potom zformulovat takto: pro každou dvojici technicky přípustných spotřebních košů, označených vektory ***A*** a ***B***, musí být pravdivé jedno a právě jedno z následujících tvrzení:

⇒ ***A*** se preferuje před ***B***

⇒ ***B*** se preferuje před ***A***

⇒ ***A*** a ***B*** jsou stejně žádoucí

Axióm tudíž předpokládá, že spotřebitel je schopen porovnat kterékoliv dostupné dva koše statků.

2. ***Tranzitivita***

Pro kteroukoliv trojici technicky dostupných spotřebních košů**,** označených vektory ***A, B*** a ***C***, musí platit: pokud spotřebitel preferuje ***A*** před ***B*** a ***B*** preferuje před ***C***, potom musí preferovat také ***A*** před ***C***.

Axióm tranzitivity zajišťuje, že se indiferenční křivky jednoho racionálního spotřebitele neprotínají.

3. ***Reflexivita***

Pro kterýkoliv spotřební koš (např. pro koš ***A***) platí: $\boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{A}$, tj. koš ***A*** má vyšší nebo stejný užitek jako on sám. Jedná se o matematickou podmínku pro existenci funkce užitku, která je však zjevně triviální.

Uvedené tři axiómy umožňují uspořádat preference**.** Pokud předpokládáme např. existenci čtyř košů, může je některý spotřebitel uspořádat do pořadí ***A*** = ***B*** > ***C*** > ***D***. To však zatím neznamená, že jsme schopni přiřadit takto uspořádaným preferencím funkci užitku. Příkladem preferencí, které vyhovují uvedeným třem axiómům, a přesto nemají odpovídající funkci užitku, jsou tzv. lexikografické preference.

Lexikografické preference

V případě lexikografických preferencí jsou spotřební koše uspořádané způsobem, který připomíná uspořádání hesel ve slovníku (lexikonu). Ve slovníku má kterékoliv heslo, jehož název začíná písmenem *D*, přednost před heslem začínajícím na *E*, bez ohledu na to, které písmeno po písmenu *D* následuje. Teprve v případě, že máme dvě hesla, která začínají na *D*, rozhoduje druhé písmeno v názvu hesla o jejich pořadí.

Obdobně mohou být uspořádány preference spotřebitele. Předpokládejme, že se spotřební koše skládají ze dvou statků *X* a *Y*. Pokud určitý koš obsahuje více statku *X* než jiné koše, potom jej spotřebitel preferuje před ostatními koši, bez ohledu na to, kolik koše obsahují statku *Y*. Teprve v případě, jestliže koše obsahují stejný objem statku *X*, bude spotřebitel preferovat ten koš, který obsahuje více komodity *Y*.

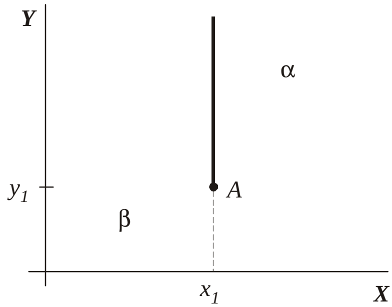
V případě lexikografických preferencí každou indiferenční křivku tvoří jediný bod. K vysvětlení použijeme graf 1-1. Zvolme si libovolný koš komodit ***A*** = $[x_1, y_1]$. Koše statků *X* a *Y*, kterým odpovídají body v ploše označené α (včetně plné čáry), spotřebitel preferuje před košem ***A***, protože body vpravo od plné čáry obsahují více statku *X* a body na plné čáře sice obsahují stejné množství statku *X* jako koš ***A***, ale zahrnují více statku *Y* než koš ***A***. Spotřebitel naproti tomu preferuje koš ***A*** proti všem košům komodit *X* a *Y*, které zobrazuje plocha β (včetně čárkované čáry), neboť koš ***A*** obsahuje více zboží *X* než koše vlevo od čárkované čáry a body na čárkované čáře sice obsahují stejné množství statku *X* jako koš ***A***, ale zahrnují méně statku *Y*.

Platí tudíž, že spotřebitel preferuje všechny koše α před košem ***A*** a koš ***A*** před všemi koši β. Neexistují tudíž koše, které jsou indiferentní ke koši ***A***. Indiferenční množina se skládá z jediného bodu.

Při výkladu jsme vycházeli z libovolně určeného bodu; stejné tvrzení platí tudíž i pro všechny ostatní body: každá indiferenční množina se skládá z jediného bodu. Nelze proto získat spojitou funkci užitku, i když lexikografické preference vyhovují všem dosud uvedeným axiómům chování spotřebitele..

Náš výklad musíme proto rozšířit o další axióm chování spotřebitele, o axióm spojitosti.

Graf 1-1 Lexikografické preference



4. ***Spojitost***

Nový axióm předpokládá, že spotřebitel požaduje zvýšení spotřeby statku *Y* při libovolně malém snížení spotřeby statku *X*. Tento předpoklad nám zajistí, že účelová funkce je spojitá.

Funkce užitku

Teprve uvedené čtyři axiómy jsou dostatečnou podmínkou pro to, abychom mohli vyjádřit uspořádané preference spotřebitele pomocí funkce užitku.

Funkci užitku získáme z uspořádaných preferencí podle jednoduchého pravidla:

⇒ přiřadíme stejné reálné číslo všem košům statků, které jsou pro spotřebitele stejně žádoucí,

⇒ pokud preferuje spotřebitel jeden koš před druhým košem, přiřadíme více preferovanému koši vyšší reálné číslo.

Stejnou skutečnost můžeme vyjádřit formálně jako:

⇒ $u\,(\boldsymbol{A}) > u\,(\boldsymbol{B})$ pokud a jenom pokud ***A*** je preferováno proti ***B***

⇒ $u\,(\boldsymbol{A}) = u\,(\boldsymbol{B})$ pokud a jenom pokud ***A*** je stejně významné s ***B***

Funkce užitku odráží uspořádaní jednotlivých spotřebních košů, jedná se proto o ordinální funkci.

Významné je znaménko (ne)rovnosti, nikoliv vlastní velikost změny číselné hodnoty mezi dvěma koši. Protože můžeme přiřadit v podstatě libovolné číselné hodnoty (vyhovující uvedenému pravidlu), můžeme pro uspořádané preference vytvořit nekonečně mnoho funkcí užitku.[1] Následující tabulka uvádí 3 příklady, kdy 4 košům uspořádaným do pořadí $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} > \boldsymbol{C} > \boldsymbol{D}$ jsou přiřazeny tři odlišné číselné řady a tudíž funkce užitku. Každý koš se přitom skládá z různého množství dvou komodit, *X* a *Y*.

---

[1] *Vzájemnou transformaci jednotlivých funkcí užitku lze provádět pomocí pozitivní monotónní transformace funkce. Její popis a vliv na mezní míru substituce ve spotřebě - viz např. [3], s. 56.*

Tabulka 1-2 Různé funkce užitku lze přiřadit stejným preferencím

Koš	Komodity		Funkce užitku		
	X	Y	$U = XY$	$V = XY + 3$	$W = X^3Y^3$
A	3	4	12	15	1728
B	4	3	12	15	1728
C	2	2	4	7	64
D	1	1	1	4	1

Z funkce užitku odvodíme její vrstevnici. V teorii spotřebitele známe vrstevnice funkce užitku pod názvem indiferenční křivky[1].

Existence funkce užitku nám ještě nezajišťuje, že lze nalézt jediné řešení při hledání optima spotřebitele, který maximalizuje užitek. Naše předpoklady o chování spotřebitele musíme proto rozšířit o další dva axiómy.

5. ***Axióm nepřesycení (dominace)***

Nechť máme dva spotřební koše (***A*** a ***B***) a nechť se každý z těchto košů skládá z určitého množství dvou statků – $\boldsymbol{A} = (x_0, y_0)$ a $\boldsymbol{B} = (x_1, y_1)$. Spotřebitel bude preferovat koš ***A*** před košem ***B***, pokud platí:

buď: $x_0 > x_1$ a zároveň $y_0 \geq y_1$

nebo: $y_0 > y_1$ a zároveň $x_0 \geq x_1$

Axióm vylučuje existenci statků s negativními preferencemi – viz [1, s. 58].

Axióm nepřesycení dále zajišťuje, že indiferenční křivky mají zápornou směrnici a že v grafickém zobrazení nejsou indiferenční křivky širší ("tlustší") než jeden bod.

6. ***Preference průměru před extrémy***

Předpokládáme, že racionální spotřebitel preferuje ve své spotřebě kombinace různých komodit před spotřebou, kdy je zastoupen ve značném rozsahu (nebo dokonce výlučně) pouze jeden statek. Např. spotřebitel dává přednost denní spotřebě dvou šálků kávy a 2 kostek cukru před spotřebou pouze 4 kostek cukru.

Preference průměru před extrémy zajišťuje ryze konvexní tvar indiferenčních křivek. Toto tvrzení lze vyjádřit i formálně. Pro každé dva koše ***A*** a ***B***, které přinášejí spotřebiteli stejný užitek u, platí:

$$U\,[t\,\boldsymbol{A} + (1 - t)\,\boldsymbol{B}] \; > \; u\,(\boldsymbol{A}) + u\,(\boldsymbol{B})$$

pro kterékoliv $t\ (0 < t < 1)$.

---

1 *Mezní míře substituce ve spotřebě MRS_C odpovídá směrnice indiferenční křivky. Analýzou MRS_C se zde nebudeme zabývat - lze ji nalézt např. v učebnici [1, s. 56]*

Připomeňme si naše matematické znalosti: ryze konvexní indiferenční křivky (tj. vrstevnice funkce užitku) souvisejí s ryze kvasikonkávní funkcí užitku.

Shrneme si náš dosavadní výklad. Existence uvedených axiómů o chování spotřebitele je ekvivalentní s existencí kvasikonkávní funkce užitku. Z hlediska účelové funkce lze tudíž jediné řešení nalézt. Je však nutné provést ještě analýzu množiny přípustných řešení.

1.3 Množina spotřebních možností

Množina přípustných řešení vystupuje v teorii spotřebitele jako množina spotřebních možností. Definujeme ji za předpokladu, že spotřebitel nakupuje pouze dva statky (X a Y) za ceny P_X a P_Y vyšší než nula a při určitém příjmu I.

Množinu vymezíme pomocí podmínek nezápornosti a rozpočtového omezení. Předpokládáme, že spotřeba komodit je nezáporná, tj. že $X \geq 0$ a také $Y \geq 0$. Rozpočtové omezení má potom tvar $P_X X + P_Y Y \leq I$.

Připomeňme si, že množina přípustných řešení musí být neprázdná, omezená, uzavřená a konvexní, abychom našli řešení našeho optimalizačního problému.

Díky podmínkám nezápornosti je množina spotřebních možností neprázdná; i když spotřebitel nic nekoupí, nacházíme se v grafu v bodě (0,0), který je součástí množiny spotřebních možností.

Množina spotřebních možností je omezená: zespodu podmínkami nezápornosti a seshora rozpočtovým omezením.

Stejně tak je množina spotřebních možností uzavřená: kterýkoliv koš na rozpočtovém omezení nebo na odpovídající části jedné z obou os je dostupný.

Množina spotřebních možností je konvexní. Spojíme-li přímkou kterékoliv dva koše statků, které jsou součástí množiny, leží tato přímka buď uvnitř množiny spotřebních možností nebo na některé její hranici.

Spojnice dvou košů může ležet na hranici množiny spotřebních možností. Množina je tudíž konvexní, není však ryze konvexní.

Díky axiómům o chování spotřebitele víme, že funkce užitku je ryze kvasikonkávní. Není tudíž nutné, aby množina spotřebních možností byla ryze konvexní, abychom získali jediné globální optimum. Dostatečnou podmínkou je konvexnost množiny.

1.4 Optimum spotřebitele maximalizujícího užitek

Spotřebitel maximalizuje svůj užitek. Obrazně řečeno, spotřebitel se snaží vystoupit na co nejvyšší bod "hory užitku", musí se však pohybovat podél "plotu", který mu zde představuje rozpočtové omezení.

Problém se tak redukuje na dosažení co nejvyšší vrstevnice (indiferenční křivky) funkce užitku při daném rozpočtovém omezení vyjádřeném rovnicí směny. Problém spotřebitele lze tak formálně zapsat ve tvaru:

$$\max U = f(X, Y)$$
$$\text{při omezení:} \quad P_X X + P_Y Y = I$$
$$X \geq 0,\ Y \geq 0$$

Problém budeme řešit pomocí Lagrangeovy funkce:

$$L = U(X,Y) - \lambda\,(P_X X + P_Y Y - I)$$

Při řešení budeme předpokládat, že existuje vnitřní řešení[1]. Vypočteme nejdříve první parciální derivace Lagrangeovy funkce:

$$\delta L/\delta X = \delta U/\,\delta X - \lambda\,P_X$$
$$\delta L/\delta Y = \delta U/\,\delta Y - \lambda\,P_Y$$
$$\delta L/\delta \lambda = -\,P_X X - P_Y Y + I$$

Parciální derivace položíme rovné nule a vypočteme podmínky prvního řádu pro vnitřní řešení. Při výpočtu současně eliminujeme z prvních dvou derivací pomocnou proměnnou λ:

$$\frac{\partial U / \partial X}{\partial U / \partial Y} = \frac{P_X}{P_Y}$$

$$I = P_X X + P_Y Y$$

První rovnice nám udává podmínku optima spotřebitele, tj. rovnost mezní míry substituce ve spotřebě (levá strana rovnice) a mezní míry substituce ve směně (pravá strana rovnice). Druhá rovnice nám pouze říká, že spotřebitel vynaložil celý příjem na nákup obou statků.

Zajímat nás bude také ekonomická interpretace pomocné proměnné λ. Jejím osamostatněním (např. z první z uvedených parciálních derivací) získáme vztah $\lambda = \delta U/\delta X : P_X$. Pomocnou proměnnou lze chápat jako stínovou cenu – kolik dodatečného (mezního) užitku získá spotřebitel za dodatečnou vynaloženou korunu svého příjmu. V bodě optima je přitom hodnota pomocné proměnné pro všechny statky stejná.

1.5 Marshallovy poptávky

Systém parciálních derivací poskytl řešení jednoho dílčího problému. Určili jsme optimální nákup statků *X* a *Y* jedince, který maximalizuje svůj užitek při určitých cenách komodit a příjmu.

---

[1] *Rozdíl mezi vnitřním a rohovým řešením - viz [1, s. 64]. Podmínky prvního řádu pro rohové řešení lze získat s pomocí Kuhn - Tuckerovy věty. Tuto větu lze též aplikovat na vnitřní řešení.*

Nás však může zajímat, jak bude reagovat poptávané množství *X* a *Y*, pokud se budou měnit ceny statků a příjem spotřebitele.

Řešení optimalizačního problému záviselo pouze na cenách, příjmu a funkci užitku. Můžeme tudíž z prvních dvou vypočtených parciálních derivací odvodit poptávkové funkce (při dané funkci užitku):

$$X = f^1 (I, P_X, P_Y)$$
$$Y = f^2 (I, P_X, P_Y)$$

Funkce, kdy nakupované množství statku závisí na příjmu spotřebitele a cenách komodit (při daných preferencích), se označují jako Marshallovy funkce poptávky.

V uvedené situaci spotřebitel nakupoval dvě komodity. Mohli jsme proto odvodit soustavu pouze dvou individuálních poptávek[1].

Podmínka druhého řádu při maximalizaci užitku požaduje ryze kvasikonkávnost funkce užitku (spotřebitel nakupuje dva statky, determinant ohraničené Hessovy matice proto musí být kladný). Podmínku jsme však zajistili pomocí šestého předpokladu o chování spotřebitele, podle něhož spotřebitel preferuje průměr před extrémy. Z hlediska ekonomické interpretace již nejsou druhé parciální derivace zajímavé a nebudeme se jimi zabývat.

Z předpokladů, které umožnily odvodit soustavu Marshallových funkcí poptávky, plyne, jaké vlastnosti musí splňovat tyto funkce, aby mělo smysl je považovat za uplatnitelné v empirickém výzkumu. Dříve, než se tímto problémem budeme moci zabývat, musíme odvodit další funkce, které plynou z maximalizace užitku spotřebitelem. Odložíme proto otázku vlastností poptávkových funkcí až do následující kapitoly.

1.6 Nepřímá funkce užitku

Funkce užitku vyjadřuje vztah mezi celkovým užitkem spotřebitele a množstvím statků, které jedinec spotřebovává. Je však často obtížné sledovat na trhu množství komodit, které spotřebitel nakupuje. V teorii, ale i v empirické analýza, je často pohodlnější nahradit množství spotřebovávaných statků jejich cenami a pracovat s tzv. nepřímou funkcí užitku.

Název funkce vyplývá ze způsobu jejího odvození. Nejdříve vypočteme Marshallovy funkce poptávky (pomocí maximalizace užitku spotřebitele) a tyto funkce dosadíme zpět do funkce užitku. Užitek spotřebitele tak závisí nepřímo, prostřednictvím maximalizačního procesu, na příjmu spotřebitele a na cenách statků.

---

[1] *Grafické odvození Marshallovy poptávky z optima spotřebitele, který maximalizuje užitek, lze nalézt v učebnici [1], s. 82 až 86.*

Pokud předpokládáme, že spotřebitel nakupuje pouze dva statky, má jeho funkce užitku tvar $U = f\ (X,Y)$. Prostřednictvím maximalizačního procesu vypočteme Marshallovy individuální poptávky pro obě komodity:

$$X = f^1(I, P_X, P_Y)$$
$$Y = f^2(I, P_X, P_Y)$$

a dosadíme je zpět do funkce užitku. Získáme tak nepřímou funkci užitku:

$$U = v\ (I, P_X, P_Y).$$

Získali jsme tak nepřímou funkci užitku, kde je užitek spotřebitele funkcí jeho příjmu a cen statků.

Nyní budeme analyzovat vlastnosti, které vykazuje spojitá nepřímá funkce užitku. Předpokládáme nejdříve, že dochází k neproporcionální změně nezávisle proměnných, které jsou obsažené v této funkci. Neproporcionální změnu cen a příjmu lze převést do situace, kdy se mění pouze jedna z proměnných. Budeme se proto nejdříve zabývat změnou velikosti příjmu při neměnné výši cen komodit a potom budeme zkoumat účinky změny ceny jedné komodity při neměnné výši ostatních cen a při konstantní výši příjmu jedince.

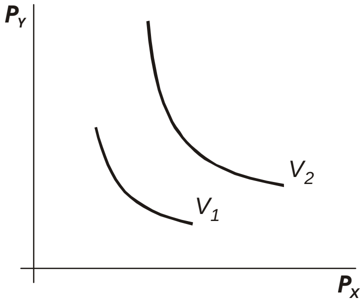
Uvažujeme nejdříve změnu příjmu. S růstem příjmu (a při neměnné výši cen) se celkový užitek jedince zvyšuje. Tato vlastnost nepřímé funkce užitku je spojena s jedním z axiómů o chování spotřebitele, s axiomem nenasycení. Nepřímá funkce užitku je tudíž rostoucí se zvyšujícím se příjmem.

Dále předpokládejme, že se bude měnit pouze jedna z cen komodit, které jedinec nakupuje. S růstem této ceny bude užitek jedince buď klesat nebo (v nejlepším případě) se nezmění. Nepřímá funkce užitku je tudíž nerostoucí s růstem cen.

Musíme též analyzovat situaci, kdy dochází k proporcionální změně nezávisle proměnných, které jsou obsažené v nepřímé funkci užitku. Pokud vzrostou všechny ceny a příjem proporcionálně (např. zvýší se dvakrát), celkový užitek jedince se nezmění. Nepřímá funkce užitku je tak homogenní stupně nula v cenách a v příjmu.

Z nepřímé funkce užitku můžeme též odvodit tzv. cenové indiferenční křivky. Cenové indiferenční křivky udávají kombinace cen, které přinášejí – při dané úrovni příjmu – jedinci stejný celkový užitek. Průběh cenových indiferenčních křivek má obvyklý tvar: křivky jsou klesající a konvexní. Cenové indiferenční křivky pro ceny dvou komodit zobrazuje graf 1-2. Pokud se zvýší cena jedné komodity (např. cena P_X) musí se snížit cena jiného zboží (tj. cena P_Y), aby jedinec dosahoval konstantní úrovně užitku. Pokud se však zvýší ceny obou komodit, užitek jedince se sníží. Z této skutečnosti ovšem plyne, že cenové indiferenční křivky, které jsou vzdálenější od počátku, odpovídají nižší úrovni celkového užitku. Na grafu 1-2 máme uvedené dvě cenové indiferenční křivky (V_1, V_2). Cenová indiferenční křivka V_2 se nachází ve větší vzdálenosti od počátku; odpovídá tak nižšímu celkovému užitku jedince, než který vyjadřuje cenová indiferenční křivka V_1.

Graf 1-2 Cenové indiferenční křivky



Shrnutí

1. Řešení existuje, pokud účelová funkce je spojitá a množina přípustných řešení je neprázdná, uzavřená a ohraničená.
2. Lokální extrém je současně extrémem globálním, pokud je účelová funkce kvasikonkávní a množina přípustných je řešení je konvexní.
3. Jediné řešení lze nalézt, pokud je buď účelová funkce ryze kvasikonkávní nebo je množina přípustných řešení ryze konvexní nebo platí obojí současně. Ryze kvasikonkávní funkce přitom vykazuje ryze konvexní vrstevnice funkce.
4. Axiómy úplnosti srovnání, tranzitivity a reflexivity umožňují uspořádat preference jednoho spotřebitele**.**
5. Spojitou funkci užitku získáme, pokud jedinec požaduje – při platnosti axiómů uvedených v předcházejícím bodě shrnutí – zvýšení spotřeby jednoho statku při libovolně malém snížení spotřeby jiného statku. Ve funkci užitku celkový užitek jedince závisí na množství spotřebovávaných komodit.
6. Indiferenční křivky jsou vrstevnice funkce užitku. Indiferenční křivky jsou ryze konvexní, pokud chování jedince vyhovuje – kromě dříve uvedených axiómů – ještě axiómům nepřesycení a preference průměru před extrémy.
7. Pokud jsou indiferenční křivky ryze konvexní, stačí k nalezení jediného řešení optima spotřebitele maximalizujícího užitek, aby byla množina spotřebních možností konvexní.
8. Řešením úlohy spotřebitele, který maximalizuje užitek, lze odvodit Marshallovy funkce poptávky. V těchto funkcích závisí nakupované množství statku na příjmu spotřebitele a na cenách komodit (při daných preferencích).
9. Dosazením Marshallových funkcí poptávky zpět do funkce užitku získáme nepřímou funkci užitku. Užitek spotřebitele v této funkci závisí nepřímo, prostřednictvím maximalizačního procesu, na příjmu spotřebitele a na cenách statků (opět při daných preferencích).

Důležité pojmy

axióm úplnosti srovnání
tranzitivita
reflexivita
lexikografické preference
Marshallova funkce poptávky
axióm nepřesycení
funkce užitku
množina spotřebních možností
stínová cena
nepřímá funkce užitku

Příklady a úlohy

1. ***Globální extrém.*** Předpokládejme, že chování jedince lze popsat funkcí užitku $U = X \cdot Y$. Ve funkci U je celkový užitek, který jedinci plyne ze spotřeby obou komodit, X a Y udávají spotřebovávaná množství obou komodit. Funkce užitku je spojitou funkcí.
Úkol: Určete, zda pro tuto funkci existuje globální extrém, pokud je množina spotřebních možností konvexní množinou.
Výsledek: Ano (mezní užitky jsou kladná čísla, vrstevnice funkce jsou ryze konvexní).

2. ***Vlastnosti omezení.*** Během druhé světové války musel zákazník zaplatit cenu zboží a odevzdat při jeho nákupu určitý počet „bodů“. Předpokládejme, že spotřebitel měl funkci užitku $U = X \cdot Y$, ceny výrobků byly $P_X = 1$ koruna a $P_Y = 2$ koruny, za komoditu X musel zákazník odevzdat 2 body a za komoditu Y platil 1 bod. Spotřebitel vynakládal na nákup statků X a Y celkem 160 korun týdně a měl k dispozici 200 bodů.
Úkol: Určete, zda množina spotřebních možností splňuje podmínky, při nichž by jedinec maximalizoval svůj užitek.
Výsledek: Ano, omezení vyhovuje všem třem požadavkům (omezení je neprázdná, uzavřená a omezená množina).

3. ***Určení optima (maximalizace užitku spotřebitelem).*** Spotřebitel vynakládá na nákup statků X a Y celkem 160 Kč týdně. Funkce jeho užitku je $U = X \cdot Y$, ceny výrobků jsou $P_X = 4$ Kč a $P_Y = 10$ Kč.
Úkol: a) Vypočtěte, kolik jednotek statku X a kolik jednotek statku Y spotřebitel nakoupí. K výpočtu použijte substituční metodu.
b) Ke stejnému výpočtu využijte Lagrangeovu funkci.
c) Ke stejnému výpočtu použijte mezní míry substituce ve spotřebě a ve směně.
Výsledek: $X = 20$, $Y = 8$

4. ***Odvození Marshallových funkcí poptávky.*** Jedinec maximalizuje svůj užitek ze spotřeby dvou komodit (X a Y). Spotřební chování tohoto jedince charakterizuje funkce užitku $U = X \cdot Y$. Ve funkci je U celkový užitek, který jedinci plyne ze

spotřeby obou komodit, a X a Y udávají spotřebovávaná množství obou komodit. Jeho rozpočtové omezení lze vyjádřit rovnicí $I = P_X\ X + P_Y\ Y$, kde I je příjem spotřebitele, P_X a P_Y jsou ceny obou komodit. Jedinec vynakládá na nákup obou zboží celý svůj příjem I.

Úkol: Odvoďte Marshallovy funkce poptávky po obou komoditách.

Výsledek: $X = I / 2\ P_X$

$Y = I / 2\ P_Y$

5. ***Odvození nepřímé funkce užitku.*** Jedinec maximalizuje svůj užitek ze spotřeby dvou komodity (X a Y). Spotřební chování tohoto jedince charakterizuje funkce užitku $U = X \cdot Y$. Ve funkci U je celkový užitek, který jedinci plyne ze spotřeby obou komodit, a X a Y udávají spotřebovávaná množství obou komodit. Jeho rozpočtové omezení lze vyjádřit rovnicí $I = P_X\ X + P_Y\ Y$, kde I je příjem spotřebitele, P_X a P_Y jsou ceny obou komodit. Jedinec vynakládá na nákup obou zboží celý svůj příjem I.

Úkol: Odvoďte nepřímou funkci užitku jedince.

Výsledek: $U = I^2 / 4\ P_X\ P_Y$

Literatura

[1] Soukupová, J. - Hořejší, B. - Macáková, L. - Soukup, J.: Mikroeko-nomie. 3. vydání, Management Press, Praha 2002. *Problematiky se týká kapitola 2 (Užitek, preference a optimum spotřebitele), která obsahuje mimo jiné výklad určení optima spotřebitele jako rovnosti mezních měr substituce, a kapitola 3 (Poptávka), kde lze nalézt grafické odvození Marshallovy poptávky.*

[2] Gravelle, H. – Rees, R.: Microeconomics. 2. vydání, Longman, London 1992. *Problematiky se týká kapitola 3 (The Theory of the Consumer), která obsahuje výklad optima spotřebitele, analýzu předpokladů zajišťujících jediné řešení optimalizačního problému, odvození Marshallovy poptávky a otázku lexikografických preferencí a kapitola 4 (Consumer Theory: Duality), kde lze nalézt odvození nepřímé funkce užitku.*

[3] Varian, Hal R.: Mikroekonomie - moderní přístup. Victoria Publishing, Praha 1995. *V kapitole 4 (Užitek) je mimo jiné vyložena zajímavým způsobem konstrukce funkce užitku a otázka monotónní transformace funkce.*

[4] Varian, H.R.: Microeconomic Analysis. 3. vydání, W.W. Norton and Co., New York 1992. *Zde zejména kapitola 7 (Utility Maximization).*

[5] Kaňka, M. – Henzler, J.: Matematika pro ekonomy (2). Ekopress, Praha 1997.

[6] Klůfa, J. – Coufal, J.: Matematika pro ekonomy (1). Ekopress, Praha 1997